# 概率论（H）2023-2024 秋冬期末试卷

图灵回忆卷

2024 年 1 月 13 日

**一、（10 分）**

1. $E, F$ 是任意的非空事件. 证明：$P(E|E\cup F) \geqslant P(E|F)$.

2. 已知事件 $A, B, C$，且 $A, C$ 不相容. $P(AB) = 0.5, P(C) = 0.3$，求 $P(AB|\overline{C})$.

**二、（10 分）** 某彩票店每天卖出的彩票数量服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布. 对于每张彩票，中奖的概率为 $p$，且各张彩票中奖与否相互独立.

1. 求卖出 $k$ 张中奖彩票的概率.

2. 已知卖出了 $k$ 张中奖彩票，求当天卖出 $m$ 张彩票的概率.

**三、（15 分）** 已知

$$f(x,y) = c(1+xy) \quad -1 < x, y < 1$$

1. 求常数 $c$ 使得 $f(x,y)$ 是联合密度函数.

2. 求 $Y = \dfrac{1}{2}$ 条件下 $X$ 的条件密度函数.

3. 求 $P\{X > Y\}$.

4. $X^2, Y^2$ 是否相互独立?

**四、（20 分）** 已知 $X \sim N(0,1)$. 对于任意给定的 $x$，当 $X = x$ 时，$Y \sim N(x,1)$.

1. 求 $Y$ 的密度函数.

2. 求条件期望 $E(XY|X = x)$.

3. 求 $X, Y$ 的相关系数.

4. 求常数 $a$ 使得 $aX + Y$ 与 $aX - Y$ 相互独立.

**五、（15 分）** 记 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是一列独立且均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布的随机变量. 记 $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，$Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. 求 $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

Hint：对任意正整数 $p, q$，有

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

**六、（15 分）** 掷 180 次均质骰子，记事件 $A$:“掷到 6 的次数不超过 25”. 用正态分布近似计算 $P(A)$. 已知 $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$.

**七、（15 分）** 已知 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是一列独立同分布的非负随机变量，期望为 1，方差为 1. 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，证明

$$2\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$