概率论(H) 2021-2022

1. Ex1

> $\mathbb{P}(A)=0.3, \mathbb{P}(B)=0.6$且$A, B$独立, 求$\mathbb{P}(AB|A\cup B)$.

$$\mathbb{P}(AB|A\cup B)=\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A\cup B)}=\frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}=\frac{1}{4}.$$

> $\mathbb{P}(X_1\cup X_2\cup X_3)=\frac{9}{16}, X_1X_2X_3=\varnothing, X_1, X_2, X_3$两两相互独立, $\mathbb{P}(X_1)=\mathbb{P}(X_2)=\mathbb{P}(X_3)$, 求$\mathbb{P}(X_1)$.

$$\mathbb{P}(X_1\cup X_2\cup X_3)=3x-3x^2=\frac{9}{16},$$

得$x=\frac{3}{4}$, 即$\mathbb{P}(X_1)=\frac{3}{4}$.

2. Ex2

> 奶茶的制作方式有A :先奶后茶和B :先茶后奶两种, $\mathbb{P}(A)=0.6$. 若一人品尝正确的概率为0.7, 求:
>
> 1. 求他认为先加奶的概率.
> 2. 另有一个人判断正确概率为0.8 , 对同一杯奶茶, 两人独立地认为是先奶后茶, 求的确是先奶后茶的概率.

(1)设C_1 :此人认为是先奶后茶, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_1)&=\mathbb{P}(C_1|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C_1|B)\mathbb{P}(B)\\&=0.7\times0.6+0.3\times0.4\\&=0.54.\end{aligned}$$

(2)设C_2 :第二人认为是先奶后茶, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2)&=\mathbb{P}(C_2|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C_2|B)\mathbb{P}(B)\\&=0.8\times0.6+0.2\times0.4\\&=0.56.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|C_1C_2)&=\frac{\mathbb{P}(AC_1C_2)}{\mathbb{P}(C_1C_2)}\\&=\frac{\mathbb{P}(C_1C_2|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C_1C_2|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C_1C_2|B)\mathbb{P}(B)}\\&=\frac{0.7\times0.8\times0.6}{0.6\times0.7\times0.8+0.4\times0.3\times0.2}\\&=\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

3. Ex3

> 已知ξ,η服从以下分布:
>
> | ξ,η | 0 | 1 | 2 |
> |---|---|---|---|
> | 0 | a | b | b |
> | 1 | b | a | b |
> | 2 | b | b | a |
>
> 1. 设 F 为 (ξ,η) 的分布函数, 求 $F(1,1)$.
> 2. 设 $\zeta=\max\{\xi,\eta\}$, 求 ζ,η 的分布列.
> 3. 若 ξ 与 η 相互独立, 求 a 和 b .

(1)$F(1,1)=F(\xi\le 1,\eta\le 1)=2a+2b.$

(2)(ζ,η)的分布列为

ζ,η	0	1	2
0	a	0	0
1	b	$a+b$	0
2	b	b	$a+2b$

(3)由分布列的规范性, 有$3a+6b=1$; 由独立性, 有

$$\mathbb{P}(\xi=0,\eta=0)=(a+2b)(a+2b)=a,$$
$$\mathbb{P}(\xi=1,\eta=0)=(a+2b)(a+2b)=b,$$

即$a=b$, 因此$a=b=\dfrac{1}{9}$.

4. Ex4

> 设X_1,X_2,X_3独立同分布于$E(1)$, 且
>
> $$Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2},\quad Y_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\quad Y_3=X_1+X_2+X_3,$$
>
> 1. 求 (Y_1,Y_2,Y_3) 的联合分布函数.
> 2. 证明 Y_1,Y_2,Y_3 相互独立.

(1)有

$$\begin{cases}X_1=Y_1Y_2Y_3,\\ X_2=Y_2Y_3-Y_1Y_2Y_3,\\ X_3=Y_3-Y_2Y_3,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}=\begin{vmatrix}y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2\\ -y_2y_3 & y_3-y_1y_3 & y_2-y_1y_2\\ 0 & -y_3 & 1-y_2\end{vmatrix}=y_2y_3^2,$$

于是

$$\begin{aligned}p_Y(y_1,y_2,y_3)&=p_X(x_1,x_2,x_3)\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\right|\\&=e^{-y_1y_2y_3}e^{-y_2y_3+y_1y_2y_3}e^{-y_3+y_2y_3}y_2y_3^2\\&=e^{-y_3}y_2y_3^2I_{0<y_1<1}I_{0<y_2<1}I_{0<y_3},\end{aligned}$$

(2)有

$$p_Y(y_1,y_2,y_3)=(I_{0<y_1<1})\cdot(2y_2I_{0<y_2<1})\cdot\left(\frac{y_3^2}{2}e^{-y_3}I_{y_3>0}\right)=p_{Y_1}(y_1)p_{Y_2}(y_2)p_{Y_3}(y_3),$$

所以Y_1,Y_2,Y_3相互独立.

5. Ex5

> 设ξ,η独立同分布服从于$N(0,1),U=3\xi+2\eta,V=2\xi+3\eta,$求
> $$r_{U+V,U^2+V^2}.$$

注意到

$$\mathrm{Cov}(\xi^2,\xi)=\mathrm{Cov}(\eta^2,\eta)=\mathrm{Cov}(\xi\eta,\xi)=\mathrm{Cov}(\xi\eta,\eta)=0;$$

且

$$U+V=5\xi+5\eta,$$
$$U^2+V^2=13\xi^2+13\eta^2+14\xi\eta,$$

于是

$$\mathrm{Cov}(5\xi+5\eta,13\xi^2+13\eta^2+14\xi\eta)=0,$$

即$r_{U+V,U^2+V^2}=0.$

6. Ex6

> n封信装在n个信封里, 设ξ为装对的信封数, 求$\mathbb{E}(\xi)$和$\mathbb{D}(\xi)$.

设X_i :第i封信被装在第i个信封里, 则$X_i\sim B\left(1,\frac{1}{n}\right)$, 故

$$\mathbb{E}(X_i)=\frac{1}{n},\quad \mathbb{D}(X_i)=\frac{n-1}{n^2},$$
$$\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{P}(X_i=1,X_j=1)=\frac{1}{n(n-1)},$$
$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)=\frac{1}{n^2(n-1)},$$

显然$\xi=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 所以

$$\mathbb{E}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=1,$$
$$\mathbb{D}(\xi)=\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=n\cdot\frac{n-1}{n^2}+(n^2-n)\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

7. Ex7

> 飞机座位有200个, 每个人有10%的可能性不登机, 问最多可出售多少张机票, 使来坐飞机的每个人都有座位的概率不小于95%.

设出售机票的张数为n, 最终落座的人数为X, 则$X\sim B(n,0.9)$, 由中心极限定理,

$$\mathbb{P}(X \le 200) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 0.9n}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}} \le \frac{200 - 0.9n}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}}\right) \approx \Phi\left(\frac{200 - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right),$$

欲使

$$\Phi\left(\frac{200 - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 = \Phi(1.65),$$

即

$$\frac{200 - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \ge 1.65 \implies n \le 214.$$

8. Ex8

> 设ξ_k服从$E(k)$且相互独立, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \xi_k$, 求证:
>
> $$\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

有

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(k^2 \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}(k^2 \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

所以

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n(n+1)}\right) = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n(n+1)}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{6n^2} \to 0,$$

由切比雪夫不等式, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{6n^2\varepsilon^2} = 0,$$

即

$$\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$