

数学分析（甲）II（H）2020 春夏期末 重制版答案

V1CeVersa

2024 年 6 月 20 日

一、函数项级数、含参变量积分、广义积分

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛, 其和函数为 $S(x)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 相关的正整数 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 相关的正实数 $A_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$, 使得当 $A > A_0(\varepsilon)$ 时, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon.$$

二、正项级数、方向导数

1. 对 $x \geq 0$, 我们证明不等式 $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$.

设 $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \geq 0$, $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, $f''(x) = -\sin x + x \geq 0$.

则 $f'(x) \geq f'(0) = 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$, 不等式得证. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n \sin(1/n)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2 - \frac{1}{3n^2})} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n^{5/3}}}$$

根据比较判别法, 此正项级数收敛.

2. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{y^2 + z^2}{r^3}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$, 所以

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(1,2,3)} = \left(\frac{13}{14\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

曲线在 P_0 点的方向向量为 $\vec{l} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \Big|_{(1,2,3)} = (1, 4, 12)$, 其单位向量为 $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{(1, 4, 12)}{\sqrt{161}}$. 那么

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l}_0 \cdot \nabla u = \frac{629}{98\sqrt{46}}.$$

三、积分的计算

1.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi z^2 dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi(1-z^2) dz \\ &= \frac{(2-\sqrt{2})}{3} \pi. \end{aligned}$$

2. 进行一个元的换: $x = y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, z = \cos \theta, \theta \in [0, 2\pi]$.

因而

$$ds = \sqrt{2 \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = d\theta.$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_L (x^2 + y^2 + z)^2 ds &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \alpha - \cos \alpha)^2 d\alpha \quad (\theta = \pi + \alpha) \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\sin^2 \alpha - \cos \alpha)^2 d\alpha \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \beta + \sin \beta)^2 d\beta \quad (\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta) \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \beta + \sin^2 \beta + 2 \cos^2 \beta \sin \beta) d\beta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \beta - 2 \sin^3 \beta - \sin^2 \beta + 2 \sin \beta + 1) d\beta \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \beta - \sin^2 \beta + 1) d\beta = \frac{7}{4} \pi. \end{aligned}$$

3. 进行一个孔的挖: 设 $P = \frac{-y}{3x^2 + 4y^2}, Q = \frac{x}{3x^2 + 4y^2}$, 由于在任意非原点处, 有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2 - 3x^2}{(3x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

我们在原点附近取一个非常小的椭圆曲线 $L': 3x^2 + 4y^2 = \delta^2$, δ 充分小, 使得 L' 完全包含在 L 内部, 设 L' 与 L 之间的区域为 S , L' 包含的椭圆为 S' . 则由格林公式, 有

$$\begin{aligned} \int_L \frac{x dy - y dx}{3x^2 + 4y^2} &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \int_{L'} \frac{x dy - y dx}{3x^2 + 4y^2} \\ &= \frac{1}{\delta^2} \int_{L'} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{\delta^2} \iint_{S'} (1+1) dx dy \\ &= \frac{1}{\delta^2} \pi \frac{\delta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. 考虑椭球面的参数表示: $x = \sin \varphi \cos \theta, y = 2 \sin \varphi \sin \theta, z = 3 \cos \varphi$, 其中 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi]$. 计算可知

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi \geq 0, \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = 6 \sin^2 \varphi \cos \theta.$$

由左式可知, 参数 (φ, θ) 决定的法向量是上侧的, 与曲线定向同向, 由第二类曲面积分的定义:

$$\begin{aligned} \iint_S x^3 dy dz &= \int_{D_{\varphi\theta}} \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \cdot 6 \sin^2 \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{12}{5} \pi. \end{aligned}$$

四、一元函数微分学

1. 由于

$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

所以

$$g(z) = f(x(z), y(z), z) = \frac{3}{2} \left(|z| + \left| z - \frac{2}{3} \right| \right) \geq \frac{3}{2} \left| z - \left(z - \frac{2}{3} \right) \right| = 1.$$

当且仅当 $z \in \left[0, \frac{2}{3} \right]$ 时取等, 所有极小值点为 $\left(1 - \frac{3}{2}z, -\frac{z}{2}, z \right), z \in \left[0, \frac{2}{3} \right]$.

2. 令 $z = 0$, 有 $y = z = 0$, 仅有 x 为非零项, 则题目所求的极小值点为 $(1, 0, 0)$.

五、重积分

给出两种方法:

法一. 因为 $f(x, 1) = f(1, y) = 0$, 所以

$$f_x(x, 1) = f_y(1, y) = 0.$$

并且由于被积函数 $xyf_{xy}(x, y)$ 在区域 D 上连续, 所以我们可以交换积分次序.

$$\begin{aligned} \iint_D xyf_{xy}(x, y) dx dy &= \int_0^1 x dx \int_0^1 yf_{xy}(x, y) dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^1 y df_x(x, y) \\ &= \int_0^1 x dx \left(yf_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f_x(x, y) dy \right) \\ &= - \iint_D xf_x(x, y) dx dy \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^1 xf_x(x, y) dx \\ &= - \int_0^1 dy \left(xf(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx \right) \\ &= \iint_D f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

法二. 设 L 为区域 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 的边界曲线, 直接计算曲线积分并利用 Green 公式得:

$$0 = \int_L xyf_y(x, y) dy - xyf_x(x, y) dx = \iint_D (yf_y(x, y) + xf_x(x, y) + 2xyf_{xy}(x, y)) dx dy.$$

所以

$$\iint_D xyf_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D y(f_y(x, y) + xf_x(x, y)) dx dy.$$

并且

$$0 = \int_L xf(x, y) dy - yf(x, y) dx = \iint_D (xf_x(x, y) + yf_y(x, y) + 2f(x, y)) dx dy$$

所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (yf_y(x, y) + xf_x(x, y)) dx dy = \iint_D xyf_{xy}(x, y) dx dy.$$

六、Fourier 级数

1. 设 $u_0(x) = \frac{a_0}{2}$, $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$). 又由于

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{M}{n^3}, \quad n \geq 1.$$

所以

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^3}$$

通过比较判别法显然可以得出该三角级数绝对收敛, 故而收敛. 并且, 由 Weierstrass 判别法, 其也是一致收敛的.

2. 由上, 该三角级数一致收敛于其和函数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 因而其可以逐项积分. 由三角函数族的正交性, 重复 Fourier 系数的构造过程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = a_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = b_n. \end{aligned}$$

即可得知其为 Fourier 级数.

3. 我们首先说明此三角级数可以逐项求导: 由于本三角级数一致收敛, 显然其点态收敛于其和函数; 并且三角级数的每一项都连续可导; 所以我们只用证明其逐项求导的级数一致收敛: 由

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} |n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}. \end{aligned}$$

并根据 Weierstrass 判别法, 其逐项求导的级数一致收敛. 这样此三角级数逐项可导, 并且其导数为导数的级数, 并且连续.

七、隐函数定理

本题题干有误, 应为: $F(x, y)$ 在带状区域 $x \in [a, b]$ 存在连续一阶偏导, $F_y(x, y)$ 有正值下界, 证明: 在 (x_0, y_0) 附近可以由 $F(x_0, y_0) = 0$ 唯一确定一个隐函数 $y = f(x)$.

默写隐函数定理的证明则可.

八、函数项级数

1. 设

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{n}(1-x), x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

由 $\sin x \leq \frac{\pi}{2x}$, 对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = \frac{\pi}{2n} \left(2 - x^{\frac{1}{n}-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)\right) \geq \frac{\pi}{2n} \left(2 - x^{\frac{1}{n}-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi}x^{-\frac{1}{n}}\right) \geq \frac{\pi}{2n}(2 - (1/2)^{-1}) = 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 所以 $f(x) \leq 0$, 即

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{\pi}{n}(1-x), x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

2. 由

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right) \frac{x^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以由 Weierstrass 判别法, 原级数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛.