数学分析（甲）I（H）2023 秋冬期末

图灵回忆卷

2024 年 1 月 11 日

1. （10 分） 叙述数列收敛的柯西收敛准则；并用该准则证明：

$$\text{数列} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^{2024}} \right\} \text{收敛.}$$

2. （35 分） 计算题

   (a) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

   (b) 求极限 $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$.

   (c) 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 e^{\sin t}\mathrm{d}t}{\ln(1+x^6)}$.

   (d) 求 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

   (e) 求双纽线 $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$ 所围平面图形的面积.

3. （10 分） 证明 Cantor 定理：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续.

4. （10 分） 求函数 $f(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值.

5. （10 分） 证明导函数介值定理：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(0)<a<f'(1)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=a$.

6. （10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积，且 f 在 $x=0$ 处右连续. 证明：函数 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ $(0\le x\le1)$ 在 $x=0$ 处的右导数等于 $f(0)$.

7. （10 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\frac{k}{n})-f(\frac{2k-1}{2n})\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

8. （5 分） 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶连续的导函数，且存在常数 $C>0$，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(|x|^2|f(x)|+|f''(x)|\Big)\le C.$$

   证明：存在常数 $M>0$，使得 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(|xf'(x)|)\le M$.