22-23 秋冬数分期末参考答案

Fairicle

2023 年 7 月 26 日

写在前面：答案仅供参考，不保证一定正确。欢迎指出错误和提出修改建议！（感觉会有不少问题，毕竟已经忘记了不少东西0.0

关于这张卷子的难度（个人主观看法，不一定对）：第一题五道计算普遍都不难，不过第四小题如果现推公式需要不少时间（不过感觉背公式也不保险，万一背错了）；第二题是很简单的定义+证明，属于一定要掌握的送分题，而且这题似乎连着考两年了（做不出来会被 cjh 拷打）；第三题纯泰勒展开计算题，有一点复杂可能会算错（我就在考试的时候算错了）但总之不难；第四第五题属于中等难度的证明，需要想一想；第六第七题比较简单，属于一看到就知道思路的题目；最后一题可能有一些技巧，需要一定的思考，但也不算很难。总之，这张卷子难度平稳，老师们下手和往年一样温柔。

1.

(1) 原式 = $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\xlongequal{\text{两次 }L'Hospital}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}.$

(2) 原式 = $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+\sin x)}{1+\sin x}=\int_1^{1+\sin 1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln(1+\sin 1).$

(3) 原式 =
$$\int\ln(x+1)\mathrm{d}(\frac{-1}{x+2})=\frac{-\ln(x+1)}{x+2}+\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x+2}-\ln(x+2)+C.$$

(4) 套弧长公式和积分公式，弧长 $s=\displaystyle\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt3+4\arcsin\frac{\sqrt3}{2}.$

(5) 用分部积分，$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}(\sin x)=0-\int_0^{+\infty}-e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x.$

类似地 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=1-\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x.$

故原式 = $\dfrac{1}{2}.$

2. 叙述：有上（下）界的非空实数集一定有上（下）确界。

证明：由确界原理知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有上确界 S.

由上确界的性质及函数单增可得 $\forall\epsilon>0,\exists x_0\in(0,1),\forall x>x_0,f(x)\geq f(x_0)>S-\epsilon.$

故对于任意 $\epsilon>0$，取上述 x_0 并令 $\delta=1-x_0$，则有 $\forall x(1-\delta<x<1),|S-f(x)|<\epsilon.$

由极限的定义可知 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$ 存在且为 S.

3.

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(0)+g'(0)x+o(x)-1+o(x)}{x}=f(0)=a$，得 $a=0$.

(2) 通过泰勒展开可以得到 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}.$

同理有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(g'(x)+\sin x)x-g(x)+\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}=f'(0).$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

4. 定义：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''(|x'-x''|<\delta):|f(x')-f(x'')|<\epsilon.$

证明：$f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 连续，从而在 $[0,2]$ 一致连续；

$x\in[1,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2023}x^{-\frac{2022}{2023}}<1,|f(x')-f(x'')|=|f'(x_0)(x'-x'')|<|x'-x''|.$

故 $\forall\epsilon>0,\exists\delta=\epsilon,\forall x',x''(|x'-x''|<\delta):|f(x')-f(x'')|<|x'-x''|<\delta=\epsilon.$

从而根据定义 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续。又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 一致连续，故在 $[0,+\infty)$ 一致连续。

（注：此思路来自于书上的某道作业题，大意是已知 $f(x)$ 连续且在 $[A,+\infty)$ 一致连续，要求证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，所以最后一步的证明我没有写出。）

5. 假设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 没有最值。由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)$ 得 $\forall\epsilon>0,\exists X>0,\forall x>X,|f(x)-f(0)|<\epsilon.$

又 $f(x)$ 在闭区间 $[0,X]$ 连续，从而在 $[0,X]$ 有最大值 M 和最小值 m.

由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 没有最值，则对于上述的 ϵ,X 必有 $\forall x\in[0,X],f(0)-\epsilon<m\leq f(x)\leq M<f(0)+\epsilon.$

综上可以得到 $\forall\epsilon>0,\forall x\in[0,+\infty),|f(x)-f(0)|<\epsilon.$

由 ϵ 的任意性，得 $\forall x\in[0,+\infty),f(x)=f(0)$，与 $f(x)$ 不为常值函数矛盾。从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有最大值或最小值。

6. 教材中有完全相同的例题/作业题，故在此略去。

7. $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处展开。$f(x)=f(\dfrac{1}{2})+f'(\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-\dfrac{1}{2})^2.$

分别令 $x=0,x=1$，得到 $f(1)=f(\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{8}f''(\xi_1),f(0)=f(\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{8}f''(\xi_2)(\xi_1\in(\dfrac{1}{2},1),\xi_2\in(0,\dfrac{1}{2})).$

两式相减，加上绝对值可以得到

$$4|f(1)-f(0)|=|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}|\leq\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\leq\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}.$$

则存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)\geq 4|f(1)-f(0)|$.

8. 对 $xf(x)$ 在 $x=1$ 处泰勒展开，得到 $xf(x)=f(1)+(f(1)+f'(1))(x-1)+\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{2}(x-1)^2$.

则 $$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}[f(1)+(f(1)+f'(1))(x-1)+\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{2}(x-1)^2]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)}+o(\frac{1}{n^2})(n\to+\infty).$$

由于 $\dfrac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)}=\dfrac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$，故上式可写成 $\dfrac{f(1)}{n}-\dfrac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})(n\to+\infty)$.

证毕。