数学分析（甲）I（H）2021 秋冬期末

图灵回忆卷

2022 年 1 月 5 日

一、(10 分) 叙述 Cauchy 收敛原理，并证明数列 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{k(k+1)}$ 收敛.

二、(32 分) 计算

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^4)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}t}{x^3}$.

2. $\displaystyle\int\frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}\mathrm{d}x$.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

4. 求 $y=e^x$ 过点 $(0,0)$ 的切线 L，并求 $y=e^x$、L 和 y 轴所夹图形绕 x 轴旋转一周的体积.

三、(8 分) 证明：无上界数列必存在发散于无穷大的子列.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定义，证明：

$$\sup_{x\in[0,1]}f(x)-\inf_{x\in[0,1]}f(x)=\sup_{x',x''\in[0,1]}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

五、(10 分) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

六、(10 分) 证明：若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$，则 $g(x)$ 一致连续.

七、(10 分) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，且其值相等.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 三阶可导，$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)>0$，$x\in(0,1)$ 时 $f(x)\in(0,1)$，且数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n(1-f(x_n))$

1. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$;

2. 证明：存在 $\alpha>0$ 和常数 $c\neq 0$，使 $\lim\limits_{n\to+\infty}cn^{\alpha}x_n=1$.