线性代数 II（H）2023-2024 春夏期末

辅学回忆卷

2024 年 6 月 24 日

一、(10 分) 求 x 使得矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ 是正规矩阵，当其是正规矩阵时求出相似的对角矩阵.

二、(10 分) 设 $U = \operatorname{span}\{(1,1,0,0),(1,1,-1,2)\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间，求 $u \in U^{\perp}$ 使 $\|u-(1,1,2,2)\|$ 最小.

三、(10 分) 设 T 为复数域上的 n 维线性空间 V 上的线性变换,T 在某组基下对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -12 & 4 & 6 \end{pmatrix}$，是否存在线性变换 S 满足 $S^2 = T$. 假如存在，求 S，假如不存在，说明理由，并求 T 的极小多项式以及 Jordan（若当）标准型.

四、(10 分) 设 T 是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的线性映射，在自然基下对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$f(x,y,z,w) = x-y+z+2w$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的线性泛函，求对偶映射 T' 在相应对偶基下的矩阵以及 $T'(f)$.

五、(10 分) 定义 $T(x,y,z) = (z,2x,3y)$，求 T 的奇异值.

六、(10 分) 求过直线 $\begin{cases} x-y+z+4=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ 和点 $(1,-1,-1)$ 的平面方程，并求该点到直线的距离.

七、(10 分) 设 V 是由 $1,\cos x,\sin x$ 所张成的线性空间，求 V 中的向量 $f(x)$，使得等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (2x-1)g(x)\mathrm{d}x$$

对所有 V 中所有 $g(x)$ 都成立.

八、(10 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性变换，证明 $U = \{(v,Tv) \mid v \in V\}$ 是 $V \times W$ 的子空间，并求 U 的维数和 $V \times W/U$ 的维数.

九、(20 分) 试给出下列命题的真伪. 若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例.

1. 正算子一定可以对角化，即存在一组基使得该算子在这组基下为对角矩阵.

2. 对于线性变换 T 以及其伴随 T^*, 有 $\operatorname{null} T^* = \operatorname{range} T$.

3. 设 T 是实线性空间 V 上的线性变换，线性空间 $\operatorname{null}(T^2+T+I)$ 的维数都是偶数维的.

4. 设 S，T 是有限维内积空间上的等距变换，证明 S 相似于 T 当且仅当它们有相同的本征（特征）多项式.