22级wzx期中，图源线代辅学群

一、（15分）求通过直线$L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$的两个互相垂直的平面$\pi_1$和$\pi_2$,使$\pi_1$过点$(4,-3,1)$

二、（15分）求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$与直线$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离

三、（15分）设$R[x]$是实系数多项式关于通常的多项式加法和数乘构成的线性空间。令$W=\{(x^3+x^2+1)h(x)|h(x)\in R[x]\}$

（1） 证明：W是$R[x]$的子空间

（2） 求$R[x]/W$的一个基和维数

四、（15分）设V和W是域F上的线性空间，$V_1,V_2\cdots V_n$是V的n个子空间且$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.证明$\mathcal{L}(V,W)$和$\mathcal{L}(V_1,W)\times\mathcal{L}(V_2,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,W)$是同构的线性空间

五、（10分）设V是一个有限维线性空间。$T\in\mathcal{L}(V)$是同构映射，记其逆映射为T^{-1}。设W是T的不变子空间。证明:W也是T^{-1}的不变子空间

六、（15分）设$M_n(C)$是n阶复矩阵关于通常的矩阵加法和数乘构成的线性空间,$U=\{A\in M_n(C)|A^T=A\}$,$W=\{B\in M_n(C)|B^T=-B\}$， 在$M_n(C)$上定义二元映射：$<\ ,\ >: M_n(C)\times M_n(C)\to C, <A,B>=tr(AB^H),\forall A,B\in M_n(R)$其中$A^H$表示A的共轭转置，即先互换A的行与列再对每个元素取复共轭得到的矩阵

(1) 证明：$(M_n(C),<>)$是复内积空间

(2) 证明： $U=W^{\perp}$

(3) 设$A\in M_n(C)$， 试求$B\in U$使得$\forall D\in U$,有$\|A-B\|\le\|A-D\|$
其中$\|A\|=\sqrt{<A,A>}$

七、（15分）设$R[x]_3$,是由次数小于等于2的实系数多项式关于通常的多项式加法和数乘构成的线性空间。对于$g(x)\in R[x]_3$,， 定义:
$f_1(g(x))=\int_0^1 g(x)dx$， $f_2(g(x))=\int_0^2 g(x)dx$,$f_3(g(x))=\int_0^{-1} g(x)dx$

(1) 证明： f_1,f_2,f_3是$R[x]_3$的对偶空间的一个基

(2) 求$R[x]_3$的一个基$g_1(x),g_2(x),g_3(x)$,使得f_1,f_2,f_3是$g_1(x),g_2(x),g_3(x)$的对偶基