一、设 $\pi_1: \lambda_1(2x+y-3z+2)+\mu_1(5x+5y-4z+3)=0$

$\pi_2: \lambda_2(2x+y-3z+2)+\mu_2(5x+5y-4z+3)=0$

π_1 过 $(4,-3,1) \Rightarrow 4\lambda_1+4\mu_1=0 \Rightarrow \lambda_1=-\mu_1 \Rightarrow \pi_1$ 的方程为 $3x+4y-z+1=0$

π_2 的法向量 $\vec{n_2}\ (2\lambda_2+5\mu_2, \lambda_2+5\mu_2, -3\lambda_2-4\mu_2)$ π_1 的法向量 $\vec{n_1}\ (3,4,-1)$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 13\lambda_2+39\mu_2=0 \Rightarrow \lambda_2=-3\mu_2 \Rightarrow \pi_2$ 的方程为 $-x+2y+5z-3=0$

二、$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ $l_2: \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ l_1 的方向向量 $\vec{s_1}\ (1,1,0)$

l_2 的方向向量 $\vec{s_2}\ (4,-2,-1)$

$\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(-1,1,-6)$

$P_1=(0,0,0)\in l_1$ $P_2=(2,1,3)\in l_2$

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}\right| = \left|\frac{-19}{\sqrt{38}}\right| = \frac{\sqrt{38}}{2}$$

三、(1) $\forall\, p(x), q(x)\in W$ $\exists\, h_1(x), h_2(x)$ s.t. $p(x)=(x^3+x^2+1)h_1(x)$ $q(x)=(x^3+x^2+1)h_2(x)$

$\forall k, l\in R$ $kp(x)+lq(x)=(x^3+x^2+1)(kh_1(x)+lh_2(x))\in W \Rightarrow W$ 是 $R[x]$ 的子空间

(2) $\forall\, p(x)+W\in R[x]/W$ $\exists\, q(x), r(x)$ s.t. $p(x)=(x^3+x^2+1)q(x)+r(x)$ $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<3$

故 $p(x)+W=r(x)+W\in \mathrm{span}_R(1+W, x+W, x^2+W)$ 故 $R[x]/W\subseteq \mathrm{span}_R(1+W, x+W, x^2+W)$

由于 $1+W, x+W, x^2+W\in R[x]/W$ 故 $\mathrm{span}_R(1+W, x+W, x^2+W)\subseteq R[x]/W$ 故 $\mathrm{span}_R(1+W, x+W, x^2+W)=R[x]/W$

设 $k_1, k_2, k_3\in R$ 且 $k_1(1+W)+k_2(x+W)+k_3(x^2+W)=0$ 即 $k_1+k_2x+k_3x^2\in W$ 因此 x^3+x^2+1 整除 $k_1+k_2x+k_3x^2$

$k_3x^2+k_2x+k_1$ 是零多项式 即 $k_1=k_2=k_3=0$ 故 $\{1+W, x+W, x^2+W\}$ 是 $R[x]/W$ 的基 $\dim R[x]/W=3$

四：令 $i_k: V_k \to V$ 包含映射 令 $\varphi: \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(V_1,W)\times\mathcal{L}(V_2,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,W)$

$x \mapsto x$ $\quad f \longmapsto (f\circ i_1, f\circ i_2, \cdots, f\circ i_n)$

$\forall k,l\in F\ \forall f,g\in\mathcal{L}(V,W)\ \varphi(kf+lg) = ((kf+lg)\circ i_1, (kf+lg)\circ i_2, \cdots, (kf+lg)\circ i_n)$

$= (k(f\circ i_1)+l(g\circ i_1), k(f\circ i_2)+l(g\circ i_2), \cdots, k(f\circ i_n)+l(g\circ i_n))$

故 φ 是线性的 $\quad = k(f\circ i_1, \cdots, f\circ i_n) + l(g\circ i_1 \cdots g\circ i_n) = k\varphi(f) + l\varphi(g)$

设 $f\in\mathcal{L}(V,W)$ 若 $\varphi(f)=0$ 则 $\forall 1\le k\le n$ $f\circ i_k = 0$ $\quad \forall v\in V$ $v = v_1+\cdots+v_n$ 其中 $v_k\in V_k$

$f(v) = \sum_{k=1}^{n} f(v_k) = \sum_{k=1}^{n} f\circ i_k(v_k) = 0$ 即 $f=0$ 故 φ 单

$\forall 1\le i\le n$ 设 $f_i\in\mathcal{L}(V_i,W)$ 令 $f: V\longrightarrow W$ $f(v) = \sum_{k=1}^{n} f_k(v_k)$ 若 $v = v_1+\cdots+v_n$ 其中 $v_k\in V_k$

(由于 $V = V_1\oplus\cdots\oplus V_n$ 故 $\forall v\in V$ v 的分解方式唯一 因此 f 会把 v 送到唯一确定的一个向量)

$\forall x\in V_k$ $\quad x = 0+\cdots+0+\underset{\substack{\uparrow\\ k\text{个位置}}}{x}+0\cdots0$ 故 $f\circ i_k(x) = f(x) = f_k(x)$ 从而 $f_k = f\circ i_k$ 故 $\varphi(f) = (f_1,\cdots,f_n)$

从而 φ 满

综上 φ 是同构

五：W 是 T 不变子空间，我们有限制算子 $T|_W: W\longrightarrow W$ 若 $u\in W$ $T|_W(u) = T(u) = 0$ 由于 T 是同构 故 $u=0$

$u \longmapsto u$

从而 $T|_W$ 是单。又 $\dim W = \dim\ker T|_W + \dim \operatorname{Im} T|_W = 0 + \dim T(W) = \dim T(W)$ $\quad T(W)\subseteq W \Rightarrow T(W) = W$

故 $\forall w\in W$ $\exists u\in W$ s.t $w = T(u)$ 故 $T^{-1}(w) = T^{-1}(T(u)) = u\in W$ 从而 W 是 T^{-1} 不变的

六：(1) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$ $B^H=(c_{ij})_{n\times n}$ $c_{ij}=\overline{b_{ji}}$

则 $\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}$

设 $D=(d_{ij})_{n\times n}$ $\langle A+D,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})\overline{b_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\overline{b_{ij}}=\langle A,B\rangle+\langle D,B\rangle$

设 $\lambda\in F$ $\langle\lambda A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij})\overline{b_{ij}}=\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}=\lambda\langle A,B\rangle$

$\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\geq 0$

$\langle A,A\rangle=0 \Leftrightarrow \forall 1\leq i\leq n,\ \forall 1\leq j\leq n\ |a_{ij}|=0 \Leftrightarrow A=0$

$\overline{\langle B,A\rangle}=\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\overline{a_{ij}}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b_{ij}\overline{a_{ij}}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}=\langle A,B\rangle$

(2) $\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in U$ $\forall B=(b_{ij})_{n\times n}\in W$ $a_{ij}=a_{ji}$ $b_{ij}=-b_{ji}$

$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(-\overline{b_{ji}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-\overline{b_{ij}})=-\langle A,B\rangle$

故 $\langle A,B\rangle=0$ 从而 $U\subseteq W^{\perp}$

令 E_{ij} 是 (i,j) 元素为1其他元素全为0的 $n\times n$ 矩阵

则 U 有基 $B_1=\{E_{ij}+E_{ji}\mid 1\leq i<j\leq n\}\cup\{E_{ii}\mid 1\leq i\leq n\}$

W 有基 $B_2=\{E_{ij}-E_{ji}\mid 1\leq i<j\leq n\}$

故 $\dim U=\frac{n(n+1)}{2}$ $\dim W=\frac{n(n-1)}{2}$

而 $\dim W^{\perp}=n-\dim W=\frac{n(n+1)}{2}=\dim U$ 故 $U=W^{\perp}$

(3) 由书上6.56 $\forall A\in V$ $\forall D\in U$ $\|A-P_UA\|\leq\|A-D\|$ 而 $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$ $\frac{A+A^T}{2}\in U$ $\frac{A-A^T}{2}\in W$ 故 $B=P_UA=\frac{A+A^T}{2}$

七：(1) 设 $k_1,k_2,k_3\in R$ $\quad k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$

考虑在 $1,x,x^2$ 处的值得 $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-2\neq 0$ 故 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 线性无关 又 $\dim L(f_1,f_2,f_3)=3=\dim R[x]_3=\dim R[x]_3'$ $\quad L(f_1,f_2,f_3)\subseteq R[x]_3'$ $\quad$ 故 $R[x]_3'=L(f_1,f_2,f_3)$

所以 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 是 $R[x]_3'$ 的基

(2) 设
$$g_1(x)=a_{11}+a_{12}x+a_{13}x^2$$
$$g_2(x)=a_{21}+a_{22}x+a_{23}x^2$$
$$g_3(x)=a_{31}+a_{32}x+a_{33}x^2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(g_1(x)) & f_2(g_1(x)) & f_3(g_1(x))\\ f_1(g_2(x)) & f_2(g_2(x)) & f_3(g_2(x))\\ f_1(g_3(x)) & f_2(g_3(x)) & f_3(g_3(x))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(1) & f_2(1) & f_3(1)\\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)\\ f_1(x^2) & f_2(x^2) & f_3(x^2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\ \frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{8}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\ \frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{8}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{6}&0&\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故 $\begin{cases}g_1(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2\\ g_2(x)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x^2\\ g_3(x)=-\frac{1}{3}+x-\frac{1}{2}x^2\end{cases}$

设 $k_1g_1(x)+k_2g_2(x)+k_3g_3(x)=0$ 两边同时作用 f_1,f_2,f_3 得 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$ 线性无关 $\dim L(g_1(x),g_2(x),g_3(x))=3=\dim R[x]_3$

$L(g_1(x),g_2(x),g_3(x))\subseteq R[x]_3\Rightarrow R[x]_3=L(g_1(x),g_2(x),g_3(x))$ 故 $\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$ 是 $R[x]_3$ 的基 且对偶基是 $\{f_1,f_2,f_3\}$.