21-22 春夏离散郑文庭班第三次小测参考答案

Fairicle

2023 年 6 月 26 日

写在前面：答案仅供参考，不保证正确性。欢迎指出错误和提出修改建议！

1. 写出关系矩阵后使用 Warshell 算法即可。

$R_* = \{(a,a),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,c),(c,d),(d,a),(d,c),(d,d)\}$

2.

(a) $R_{min} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,e),(b,f),(c,b),(c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(d,d),(e,e),(f,f)\}$
(b) 略。(c) d,e,f (d) a (e) 没有。(f) a (g) 没有。

3. 使用 Kruskal 算法或者 Prim 算法。最小值为 37，图略。

4. 使用 Dijkstra 算法。最短路长度为 17，图略。

5. 建树，高度为 2 的节点 : b,c,d，高度为 3 的节点 : a，高度为 4 的节点 : e,f。图略。

平均所需字节 : $3\times0.15+2\times0.22+2\times0.26+2\times0.19+4\times0.08+4\times0.1=2.51$

6. $r\le2$ 或者 $s\le2$ 。

证明：$r\le2(s\le2)$ 时肯定能按定义使得边不交叉。$r\ge3$ 且 $s\ge3$ 时，一定有一个 $K_{3,3}$ 子图，所以不是平面图。

7. 考虑用图论建模：任意两个人之间都有胜负关系，我们把输的人向赢的人连一条边。那么每两个人之间都**有且仅有**一条边。如果这个边是无向的，那这个图就是完全图 K_n。但是这个边是有向的，方向代表着胜负，这种图被称为**竞赛图**。至此我们把问题转化成了图论问题：对于竞赛图，是否一定有哈密顿路径？

证明：$n\le3$ 时易证。

使用**归纳法**：假设 $n=k$ 时，存在一条哈密顿路径 $p_1\to p_2\to\ldots\to p_{n-1}\to p_n$。$n=k+1$ 时：记新的第 $k+1$ 个人为节点 q。

如果有边 $q\to p1$ 或者 $p_n\to q$，那么只需要把 q 放在之前那条路径的首或者尾，就得到了一条新哈密顿路径。

如果不是这样，那么一定是有边 $p_1\to q$ 和 $q\to p_n$。依次考虑 p_i 和 q 之间的边 $(i=2,3,\ldots,n)$ 。找到**最小**的 i_m 使得 p_{i_m} 和 q 之间的边是 $q\to p_{i_m}$（一定能找到这样的 i_m，因为已知 $q\to p_n$）。同时，易知一定有 $p_{i_m-1}\to q$（因为已知 $p_1\to q$）。

那么，一条新的哈密顿路径为 $p1 \to ... \to p_{i_m-1} \to q \to p_{i_m} \to ... p_{n-1} \to p_n$。所以 $n = k + 1$ 时也成立。

由归纳法知：对竞赛图，一定有哈密顿路径。所以本题结论得证。

8. (a) 染色数为 3。

(b) 是的，两个图同构。可以找到一个一一对应关系为
$0-a, 1-i, 2-j, 3-c, 4-b, 5-g, 6-f, 7-e, 8-d, 9-h$。

(c) 假设是平面图。由于最小的环有五条边，由平面图的欧拉定理推论有 $e \leq \frac{(v-2)k}{k-2}$ ，在这里 $k=5$。带入
$e=15, v=10$，得 $15 > \frac{40}{3}$，矛盾，故不是平面图。

(d) 假设是哈密顿图（即存在一条哈密顿回路）。则这个图是在一个长为 10 的环（也就是一条哈密顿回路，**见图 1**）上**加五条新边**得到的。由于对于这个环，每个节点的度**都为** 2，而彼得森图每个节点的度**都为** 3，说明新加的这五条边刚好给每个节点都加了一个度，也就是每个节点**在且仅在**一条新边上。

考虑怎么连这五条新边，不失一般性地我们先考虑给节点 1 连的那条边。由于**彼得森图没有长度小于 5 的环**，所以这条边只能从 1 连向 6 或 5（7 和 5 等价，我们只讨论连向 5）。

如果 1 连 5（**如图 2**），那么考虑 10 的连边，同样的有上述环长度的限制条件，10 只能连 $4, 5, 6$。由于 1 和 5 连了，所以不能再连。如果连 4，会有一个四元环 $1-5-4-10-1$ ，矛盾；如果连 6，会有一个四元环
$1-5-6-10-1$，也矛盾。所以 1 连 5 是不行的，由节点的**任意性**，可以知道，不仅仅是节点 1，所有节点都不能连像上述一样的形成一个五元环和一个七元环的边，只能选择连形成两个六元环的边，即 1 连 6。

如果 1 连 6（**如图 3**），2 只能连 7 不能连 8，否则和 1 连 5 一样会导出矛盾。但是，2 连 7 会导致出现一个四元环
$1-6-7-2-1$，也矛盾。综上所述，无论这五条新边怎么连，都连不出彼得森图。所以，彼得森图不是哈密顿图。

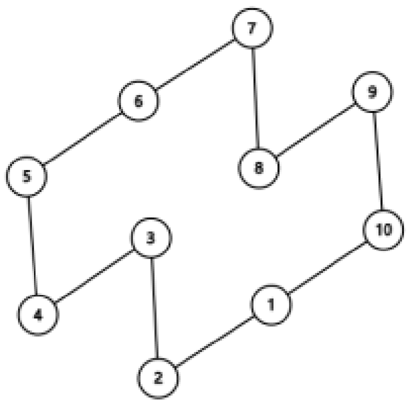

图 1

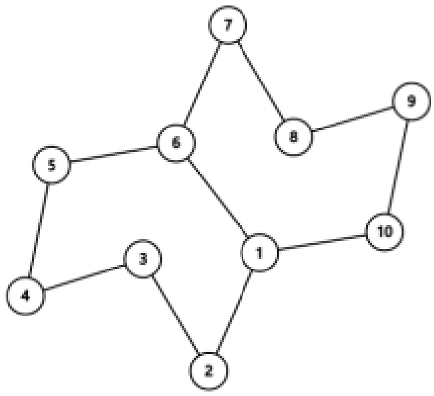

图 2

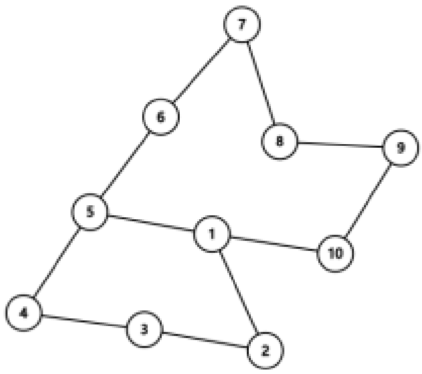

图 3